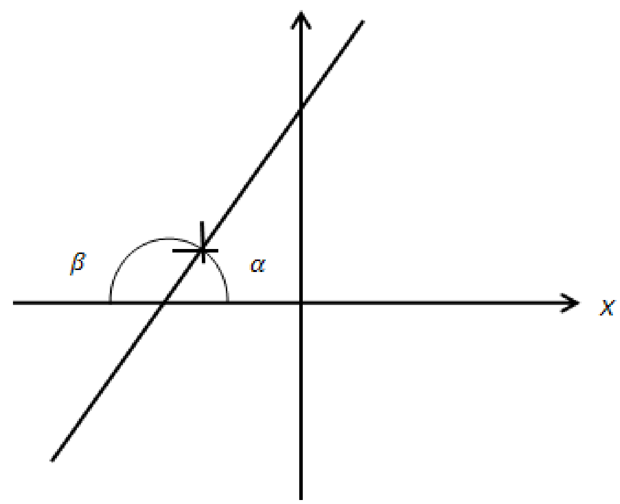
LA LÍNEA RECTA
ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

Definimos una línea recta como una sucesión infinita de puntos consecutivos que se extienden en una misma dirección. Ahora, nuestros esfuerzos estarán dirigidos a establecer una nueva definición de línea recta en términos de un nuevo concepto asociado a ella, su pendiente. Es importante aclarar que esta idea nace a partir de ubicar a la recta sobre un plano de coordenadas. El concepto de pendiente de una recta a su vez viene asociado con otro elemento importante de la línea recta, estamos refiriéndonos a su ángulo de inclinación.

Tracemos una línea recta en el plano y pongamos nuestra atención en los ángulos que se forman entre el eje X y la línea recta trazada; de manera más precisa sobre los ángulos que quedan por encima del eje horizontal como se muestran en la figura.

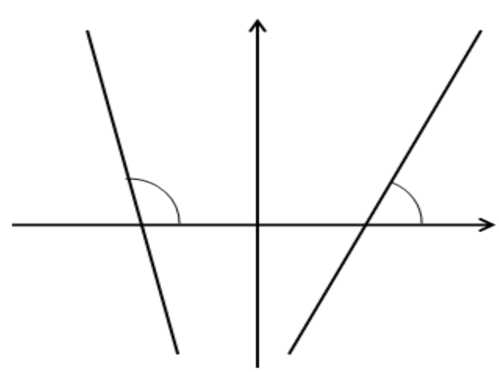


Diremos que un *ángulo es positivo*, si este es medido en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y será *negativo*, si es medido en el mismo sentido al giro de las manecillas de un reloj. En adelante, el sentido de medición de un ángulo lo señalaremos a través de un arco con flecha.

O sea que en nuestra figura, el ángulo α es positivo, mientras que el ángulo β es negativo. Esto por el sentido en que apuntan las flechas.

Definición: Llamaremos **ángulo de inclinación de una recta** al ángulo positivo que se mide a partir del eje *X* hacia la recta.

Es importante aclarar que en nuestra definición solo nos referimos a los ángulos que se forman por encima del eje *X*.
Es evidente, que por nuestras consideraciones el valor del ángulo de inclinación de una recta estará comprendido entre $0°$ y $180°$. En la siguiente figura, se señalan los ángulos de inclinación para cada una de las rectas trazadas:



Una vez hechas estas argumentaciones, estamos listos para definir la pendiente de una recta:

Definición
Se llama **pendiente de una recta** a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación. La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por lo tanto, simbólicamente se expresa así:

$$m = \tan \alpha$$

Donde:

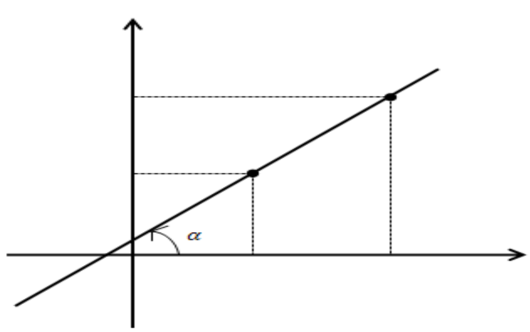
m : pendiente de la recta
tan : tangente trigonométrica
α : ángulo de inclinación de la recta.

En vista de que el ángulo de inclinación de cualquier recta oscila entre los valores de $0°$ y $180°$, entonces *la pendiente es positiva*, si el ángulo de inclinación de la recta es agudo $(0° < \alpha < 90°)$ y *es negativa* si el ángulo de inclinación es obtuso $(90° < \alpha < 180°)$. Si el ángulo de inclinación es igual a $90°$, entonces se trata de una recta coincidente o paralela al eje *Y* y como la $\tan 90°$ no está definida, se deduce que la pendiente de un recta paralela al eje *Y* no existe. Para el caso donde el ángulo de inclinación sea de $0°$ o $180°$, entonces se trata de una recta que coincide o es paralela con el eje *X* y su pendiente es igual a cero en cualquiera de los dos valores. (Verificar para este último caso que $\tan 0° = 0$ y $\tan 180° = 0$)

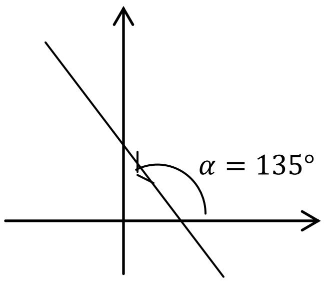
Por otro lado, no es difícil deducir a partir de la definición de pendiente de una recta, otra manera de calcular la pendiente de una recta dados dos puntos de ella en el plano.
Esto es, si se sabe que una recta pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces su pendiente se puede definir en términos de las coordenadas de los puntos por los cuales ella pasa. Así tenemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Gráficamente,



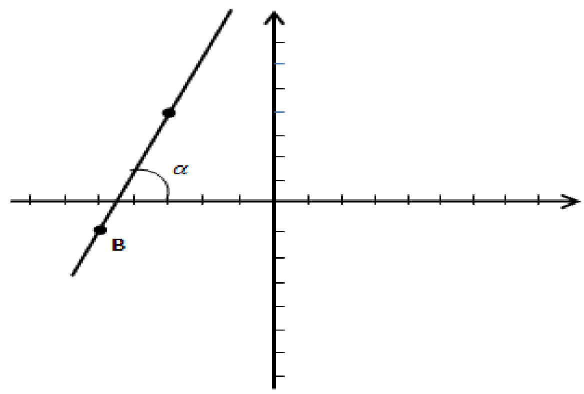
Ejemplo 1. Halle la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de $135°$.



Solución:

$$m = \tan 135° = -1$$

Ejemplo 2. Encuentre la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(-5,-1)$.



Solución: Indiquemos primero las coordenadas de los puntos, para sustituirlos correctamente en la

$x_1 , y_1 x_2 , y_2$

DATOS: FÓRMULA: SUSTITUCIÓN:

$A(-3,4)$ y $B(-5,-1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \quad \frac{-1-4}{-5-(-3)} = \frac{-5}{-5+3}$$

RESULTADO:

$$m = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} = 2.5 *$$

Para calcular el ángulo de inclinación, tomemos $m = \tan \alpha$, de la cual se deduce que $\alpha = \tan^{-1}(m)$. Así:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68.19°$$

Para hacer este último cálculo, se le recomienda al estudiante que lo haga a través de una calculadora científica auxiliados por su profesor.

Ejemplo 3. Halle la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por los puntos $A(-2,3)$ y $B(3,-2)$. $x_1 , y_1 x_2 , y_2$

Solución: Indicando coordenadas $A(-2\,,3)B(3\,,-2)$

Haciendo sustituciones:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{3 - (-2)} = \frac{-5}{3 + 2}$$

$$m = \frac{-5}{5} = -1$$

Calculando el ángulo de inclinación:

$$\alpha = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

Pero como el ángulo de inclinación debe ser el positivo, entonces:

$$\alpha = 180° - 45° = 135°$$

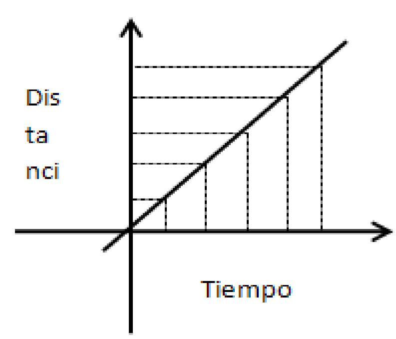
PENDIENTE DE UNA RECTA COMO RAZÓN DE CAMBIO

La pendiente de una recta en un sentido totalmente geométrico, también se puede interpretar como una razón constante entre los incrementos de dos magnitudes variables. Por ejemplo, en una competencia de $100\ m$ planos, el ganador registra cada $20\ m$ las siguientes marcas:

Distancia total (m)	*Tiempo transcurrido (s)*	*Rapidez (m/s)*
0	*0*	*10*
20	*2*	*10*
40	*4*	*10*
60	*6*	*10*
80	*8*	*10*
100	*10*	*10*

Observe que las magnitudes variables que intervienen son la distancia (d) y el tiempo (t); y no es difícil ver también que estas magnitudes presentan una variación directamente proporcional, es decir, que por cada 2 segundos que transcurrían el competidor recorría 20 metros, con lo que siempre mantuvo una rapidez constante igual a 10 m/s.

En otras palabras, la rapidez se puede interpretar como una razón constante entre los incrementos de dos magnitudes variables, a saber: distancia y tiempo. Ahora, si ubicamos los puntos en un plano cartesiano y observamos la posición que guardan entre sí, nos damos cuenta que estos se forman en una línea recta cuya pendiente es igual a la constante de proporcionalidad (rapidez).



Así por ejemplo, consideremos los puntos de coordenadas $(4,40)$ y $(8,80)$; calculando la pendiente se tiene:

$$m = \frac{80-40}{8-4} = \frac{40}{4} = 10$$

O sea que la constante de proporcionalidad es 10 y la razón de cambio es de 20 metros por cada 2 segundos.
El modelo que nos permite relacionar las dos magnitudes involucradas queda bien expresado mediante la siguiente relación:

$$d = 10t$$

Donde d : es distancia
t : es tiempo y;
10 : es la constante de proporcionalidad.

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Del hecho de que dos rectas son paralelas si la distancia entre ellas siempre es la misma, se deduce que estas siempre tienen el mismo ángulo de inclinación y en consecuencia la misma pendiente. Esto es, si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales; simbólicamente:

$m_1 = m_2 l_1$ $\longrightarrow$ es paralela a l_2 o bien $l_1 \,||\, l_2$

si m_1 es la pendiente de la recta l_1 y m_2 es pendiente de la recta l_2.

De igual modo, recordemos que dos rectas son perpendiculares, cuando estas se cortan formando ángulos de $90°$. Para dos rectas perpendiculares se tiene que la pendiente de una de ellas es igual al reciproco de la pendiente de la otra con signo contrario. Es decir, si m_1 es la pendiente de la recta l_1 y m_2 es la pendiente de la recta l_2 entonces $m_1 m_2 = -1$.

Ejemplo 1. Demuestre que la recta que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B(4,1)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $C(-1,1)$ y $D(3,7)$.

Solución: Calculando las pendientes de cada una de las rectas:

$$m_{AB} = \frac{1-5}{4-(-2)} = -\frac{4}{6}$$

$$m_{CD} = \frac{7-1}{3-(-1)} = \frac{6}{4}$$

Como:

$$m_{AB}m_{CD} = \left(-\frac{4}{6}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = -\frac{24}{24} = -1$$

Se concluye que las rectas son perpendiculares.

DEFINICIÓN DE LINEA RECTA

El estudiante recordará algunas definiciones de línea recta dadas en sus cursos anteriores, como por ejemplo, la que expresa que una línea recta es una sucesión infinita de puntos consecutivos que tienen la misma dirección o aquella que menciona que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. A estas alturas de nuestros conocimientos, podemos aceptar una definición más de línea recta basada en términos de su pendiente.

Definición: Una línea recta es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen entre sí la misma pendiente. Es decir, que si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de la recta, el valor de la pendiente calculado mediante la fórmula:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2}$$

resulta siempre constante.

Más adelante, veremos que una recta, analíticamente, es una ecuación de primer grado en dos variables y viceversa.

ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO Y TIENE UNA PENDIENTE DADA

El problema fundamental de la geometría analítica estriba en dos situaciones bien importantes. Una de ellas es determinar la ecuación de una figura geométrica a partir de las características que presenten sus puntos en el plano y la otra es la situación inversa, es decir, dada una ecuación ahora el problema es interpretarla geométricamente o lo que es lo mismo construir su grafica correspondiente.

Geométricamente hablando, una recta queda perfectamente bien determinada si se conocemos uno de sus puntos y su pendiente. En este apartado, nos toca exponer la ecuación de la recta a partir de esos dos de sus elementos.

Para hallar la ecuación de una recta a partir de estos dos elementos, supongamos que $P(x_1, y_1)$ es uno de los puntos por los cuales pasa la recta; luego si $P(x,y)$ denota un cualquier punto de la recta distinto al punto $P(x_1, y_1)$ entonces, la pendiente m de la recta queda determinada por:

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}}$$

de donde obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Puesto que $P(x, y)$ es punto cualquiera de la recta entonces la anterior relación es la ecuación de la recta denominada forma punto-pendiente. Así concluimos:

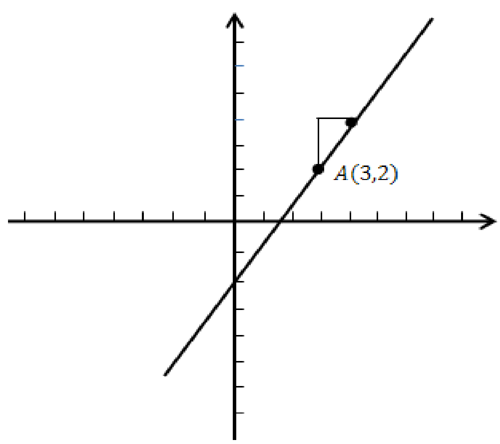
La ecuación de la recta en su forma punto-pendiente está dada por:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Es importante decir, que a partir de esta ecuación se obtienen otras formas de la ecuación de la recta. Por otro lado, para graficar una recta dado un punto de ella y su pendiente se siguen los siguientes pasos:

1.- Se ubica el punto dado $P(x_1, y_1)$ en el plano coordenado.
2.- Para este fin, es mejor tomar la pendiente en valor fraccionario, digamos $m = \frac{y}{x}$, luego a partir del punto $P(x_1, y_1)$se avanzan verticalmente hacia arriba tantas unidades como lo indique el numerador (si el signo de la pendiente es positivo) o hacia abajo (si el signo de la pendiente es negativo). A partir de allí, se avanzan hacia la derecha tantas unidades lo indique el denominador, localizando de esta manera otro punto por el cual también pasa la recta.
3.- Así, se traza la recta de tal manera que pase por el punto $P(x_1, y_1)$ dado y el punto localizado en el paso anterior.

<u>Ejemplo 1</u>.Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,2)$ y tiene una pendiente igual a 2.



Solución: En este problema, $A(3,2)$ y $m = 2$

Fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituciones

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

$$y - 2 = 2x - 6$$

$$y - 2 - 2x + 6 = 0 \quad \text{(Igualando a cero)}$$

$$y - 2x + 4 = 0$$

Graficando de acuerdo al método señalado anteriormente:

Ejemplo 2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4,-3)$ y tiene una pendiente igual a $-\frac{1}{3}$.

$x_1,\ y_1$

Solución: Para este problema $A(-4,-3)$ y $m=-\frac{1}{3}$

Fórmula:

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

Sustituciones:

$$y-(-3)=-\frac{1}{3}(x-(-4))$$

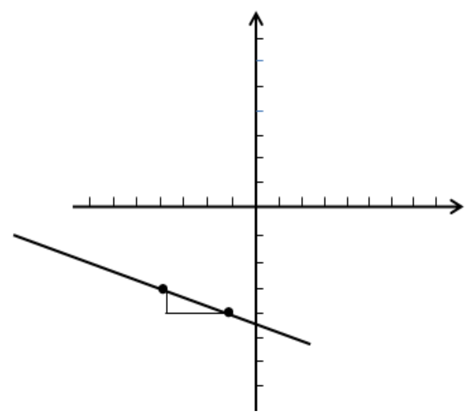
$$y+3=-\frac{1}{3}(x+4)$$

$$3(y+3)=-1(x+4)$$
$$3y+9=-x-4$$

$3y+9+x+4=0$

$$3y+x+13=0$$

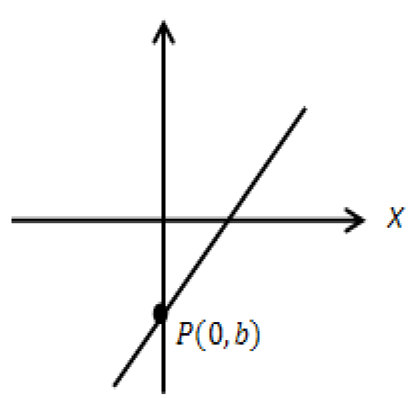
Graficando:



NOTA: Para el caso de una recta que coincida o sea paralela al eje *Y*, sabemos que su pendiente no existe. Por lo tanto, la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta no puede representar a una recta de tal naturaleza, ni siquiera nuestra definición de recta puede aplicarse a ella. Para este caso, se puede demostrar que la ecuación de la recta es de la forma $x=k$, en donde k es cualquier número real.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADA SU PENDIENTE Y SU ORDENADA EN EL ORIGEN

Antes de ver esta forma de ecuación para la línea recta, aclaremos el significado de “ordenada en el origen”. Se le dice ordenada en el origen a la intersección de la recta con el eje *Y* y se representa con la letra b. (Ver figura)



Ahora bien, si se conocen las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje *Y*, las cuales son $(0,b)$ y también su pendiente m podemos obtener la ecuación de la recta en su *forma pendiente-ordenada al origen* aplicando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

Sustituyendo el punto $P(0, b)$ en la ecuación punto-pendiente, tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y - b = mx$$
$$y = mx + b$$

Así la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada en el origen está dada por:

$$\boxed{y = mx + b}$$

En el desarrollo del siguiente ejemplo emplearemos un nuevo método para obtener la gráfica de la recta. Observemos:

<u>Ejemplo 1.</u> Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje *Y* es -2.

Solución: Su ecuación se obtiene mediante la forma:

$$y = mx + b$$

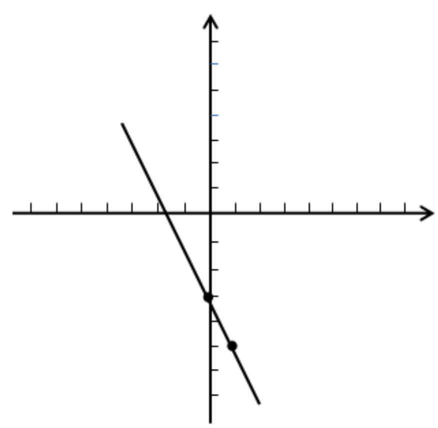
Sustituyendo valores tenemos:

$$y = -2x + (-3) = -2x - 3$$

Para hacer la gráfica de la recta, se elabora antes una tabulación donde solo serán necesarios asignar dos valores a la variable x, evaluarlos en la ecuación pendiente-ordenada al origen y obtener así los correspondientes valores para y. Los valores para x se pueden tomar arbitrariamente, aunque los más convenientes son 0 y 1; porque son fáciles de evaluarlos, veamos:

x	$y = -2x - 3$	$P(x, y)$
0	$-2(0) - 3 = -3$	$A(0, -3)$
1	$-2(1) - 3 = -5$	$B(1, -5)$

Graficando puntos obtenidos se traza la recta:



ECUACION DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Geométricamente una recta queda bien determinada por dos puntos cualesquiera de esta y analíticamente hablando la ecuación de una recta también, queda perfectamente determinada si conocemos las coordenadas de cualquiera dos de sus puntos.

O sea que si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de la recta entonces, la pendiente de la recta es:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene su pendiente dada es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

De aquí que, conocida la pendiente y un punto de ella, digamos $A(x_1, y_1)$, (es lo mismo si se elige $B(x_2, y_2)$) se tenga que:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Sustituyendo la pendiente y el punto en la ecuación punto-pendiente. Esta última ecuación es conocida como la ecuación de la recta que pasa por dos puntos de ella.

Así establecemos que la ecuación de la recta conocidos dos de sus puntos es:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los siguientes dos puntos: $A(-2,3)$ y $B(3,-4)$.

Solución: Etiquetando coordenadas para evitar errores en la sustitución:

$$\overset{x_1,\,y_1}{A(-2,3)} \text{ y } \overset{x_2,\,y_2}{B(3,-4)}$$

Fórmula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Sustituyendo valores:

$$y - 3 = \frac{-4 - 3}{3 - (-2)}(x - (-2))$$

$$y - 3 = \frac{-7}{3 + 2}(x + 2)$$

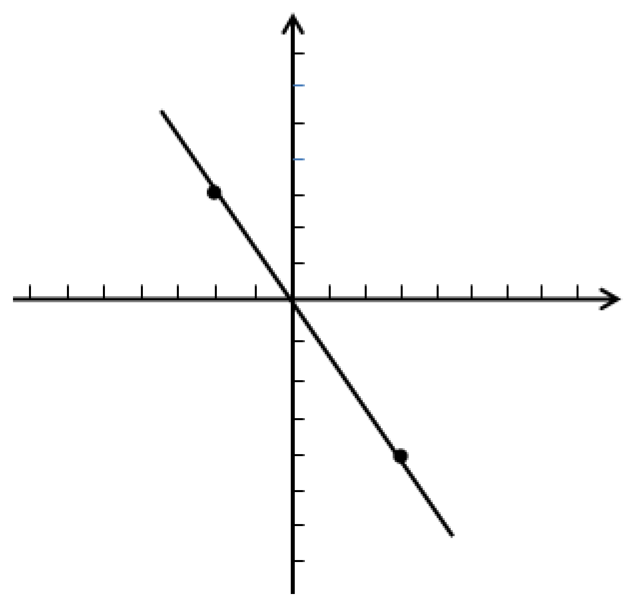
$$y - 3 = \frac{-7}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 3) = -7(x + 2)$$

$$5y - 15 = -7x - 14$$

$$5y - 15 + 7x + 14 = 0$$

$$5y + 7x - 1 = 0$$



La obtención de su gráfica es fácil, únicamente se ubican los puntos $A(-2,3)$ y $B(3,-4)$ en el plano y se traza la recta por esos puntos.

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

Para obtener la ecuación simétrica de la recta, supongamos que conocemos las intersecciones de la recta con los dos ejes coordenados como se nos muestra en la figura:

Es fácil notar que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje X son de la forma $(a,0)$ con $a \neq 0$ (algunas veces llamada esta forma abscisa en el origen) y que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje Y son de la forma $(0,b)$ con $b \neq 0$. (Esto es, la ordenada en el origen)

La ecuación de la recta en su forma simétrica se obtiene aplicando a los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, así tenemos:

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x-a)$$

De donde,

$$ay = -bx + ab$$

o equivalentemente

$$ay + bx = ab$$

Dividiendo entre ab a la ecuación, se llega a:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

De aquí que, la forma simétrica de la recta este dada por esta última ecuación. De manera, formal diremos que, la ecuación de la recta en su forma simétrica está dada por:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ejemplo 1. Se sabe que una recta en el plano interseca a los ejes X y Y en 2 y -3 respectivamente. Halle su ecuación
.
Solución: Para hallar su ecuación utilizamos la fórmula:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Sustituyendo valores, en este caso $(2,0)$ y $(0,-3)$ tenemos:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

o bien,

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

multiplicando por 6 a toda la ecuación, se obtiene:

$$3x - 2y = 6$$
$$3x - 2y - 6 = 0$$

Para hacer la gráfica de la recta se ubican las intersecciones con los ejes y se traza la recta por esos puntos. La gráfica de esta recta se le deja al estudiante como ejercicio.

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si fuimos observadores, en todas las formas de la ecuación de una recta, obtuvimos una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$. (Constátelo revisando cada uno de los ejemplos hechos en cada una de las formas obtenidas).

Esto se debe a que el lugar geométrico de una recta en el plano siempre tiene asignada una ecuación en esta forma. Es decir, una recta, analíticamente es una ecuación de primer grado (o ecuación lineal) en dos variables de la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

en donde ya sea A o B debe ser diferentes de cero y C puede o no ser igual a cero. A esta ecuación se le llama forma general de la ecuación de una recta. Más generalmente se puede expresar que:

Una ecuación lineal en dos variables representa siempre una recta y recíprocamente.

Ejemplo:

[1] Convierta la ecuación general de la recta dada por $5x + 2y + 10 = 0$ a las formas pendiente-ordenada al origen y simétrica.

Solución:

a) Para pasar de la forma general a la forma pendiente-ordenada en el origen, solo basta despejar la variable y de la ecuación dada.

$$5x + 2y + 10 = 0$$

$$2y = -5x - 10$$

$$y = \frac{-5x - 10}{2}$$

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{10}{2}$$

$$y = -\frac{5}{2}x + (-5)$$

b) Para pasar de la forma general a la forma simétrica, se pasa el termino independiente al segundo miembro de la ecuación y se divide a toda la ecuación entre éste.

$$5x + 2y + 10 = 0$$

$$5x + 2y = -10$$

$$\frac{5x + 2y}{-10} = \frac{-10}{-10}$$

$$-\frac{5x}{10} - \frac{2y}{10} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{10}{5}} + \frac{y}{-\frac{10}{2}} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-5} = 1$$