De grados tres y cuatro

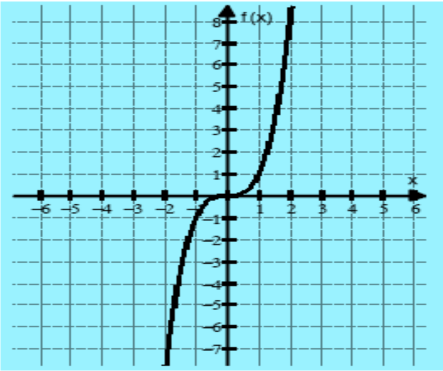
Comportamiento general de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro

Funciones de grado tres. La forma general de las funciones de grado tres (cúbicas) es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$; en su forma estándar se presenta como $f(x) = a(x-h)^3 + k$.

Primero se trabajará con la forma estándar, para observar el comportamiento de la gráfica con respecto a los cambios que sufren los parámetros.

<u>**Ejemplo.**</u> Graficar la función $f(x) = x^3$.

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8



Al punto donde la función cambia de concavidad, se le llama **punto de inflexión**(P.I.), que en el caso de la función cúbica base, es el origen.

Para graficar una función cúbica utilizando los parámetros de forma estándar, se siguen los siguientes pasos:

1. Encontrar y graficar el punto de inflexión: $P.I.(h, k)$.
2. A partir del punto de inflexión se recorre una unidad a la derecha y si el parámetro *a* es positivo, se ubica el punto hacia arriba *a*, de no ser así, se ubica hacia abajo.
3. A partir del punto de inflexión, se recorre una unidad hacia la izquierda y se coloca el punto en sentido contrario del punto que se colocó en el paso 2, es decir, si el punto que está a la derecha del punto de inflexión quedó hacia arriba, éste quedará hacia abajo “a” unidades y viceversa.
4. Se traza la gráfica.

<u>**Ejemplo.**</u> Trazar la gráfica de la función $f(x) = 2(x-1)^3 + 3$ utilizando parámetros.

Solución. El punto de inflexión se extrae de la función cúbica, de la misma forma que se extrae el vértice de la función cuadrática.

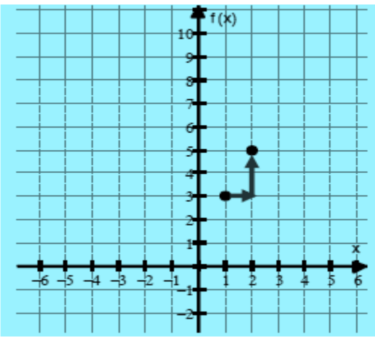
$$f(x) = 2(x-1)^3 + 3$$

$$f(x) = a(x-h)^3 + k$$

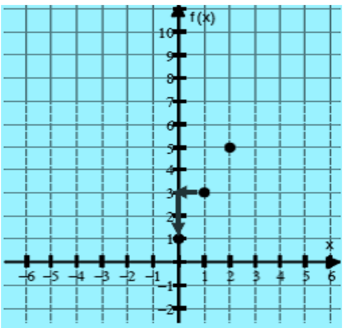
Por lo tanto, el punto de inflexión es:

$$P.I.(1,3)$$

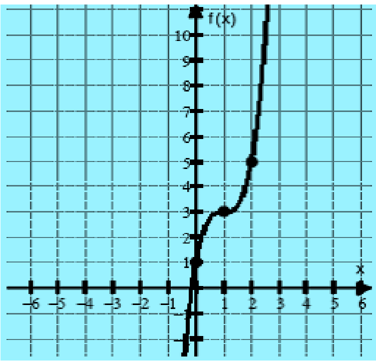
Como el parámetro $a = 2$, cuando se recorre una unidad a la derecha del punto de inflexión, el segundo punto se ubicará dos unidades hacia arriba, como se muestra en la siguiente figura:



A continuación se situará el tercer punto, recorriendo una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo, debido a que es en sentido contrario del segundo punto.



Por último, para trazar la gráfica se parte del punto de inflexión, considerando que a la derecha de éste es cóncava hacia arriba y a su izquierda es cóncava hacia abajo, quedando la gráfica de la siguiente forma.

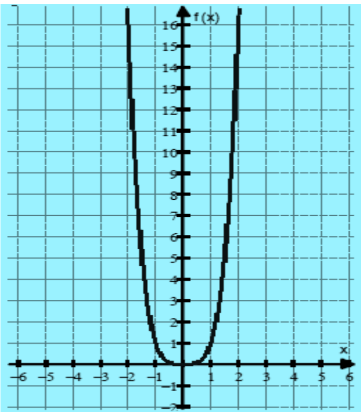


Funciones de grado cuatro. La forma general de las funciones de grado cuatro (cuárticas) es $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, con $a \neq 0$; en su formaestándar se representa como $f(x) = a(x-h)^4 + k$.

La función cuártica tiene un comportamiento parecido a la parábola, sólo que el crecimiento es más rápido.

La función cuártica base es: $f(x) = x^4$.

x	$f(x)$
-2	16
-1	1
0	0
1	1
2	16



En la función cuártica el dominio es el conjunto de números reales, pero el rango sólo es una parte de ellos, a diferencia de la función cúbica la cual cruza desde∞ hasta$-\infty$.

Los parámetros tienen el mismo efecto que en la función de grado dos (cuadrática); en el caso que el parámetro a sea positivo la función tiende infinitamente hacia arriba, si el parámetro a es negativo, la función tiende infinitamente hacia abajo.

Cuando se conoce la función estándar de una función cuártica, se puede conocer el punto máximo o mínimo, esto dependerá del signo del parámetro a.

<u>Ejemplo.</u> Trazar la gráfica de la función $f(x) = -3(x+2)^4 + 4$, utilizando los parámetros.

Solución. Como $a = -3$, la función tiende infinitamente hacia abajo y su punto máximo es, $P(h,k)$ y para obtenerlo se realiza la siguiente comparación.

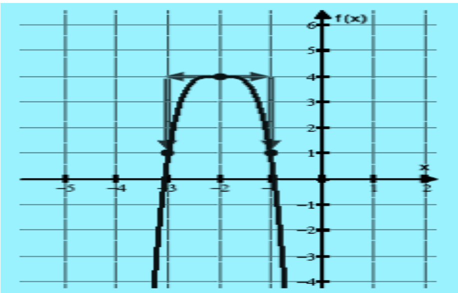
$$f(x) = -3(x+2)^4 + 4$$

$$f(x) = a(x-h)^4 + k$$

Por lo tanto, el punto máximo es:

$$P(-2,4)$$

El segundo punto se ubica una unidad a la derecha del máximo y tres unidades hacia abajo; el tercer punto se encuentra una unidad a la izquierda y de igual forma, tres unidades hacia abajo, como se muestra en la siguiente figura.



Influencia de los parámetros de funciones de grados tres y cuatro en su representación gráfica

Graficación de funciones utilizando las raíces o ceros de la función.

Trazar gráficas de funciones cúbicas y cuárticas en su forma estándar es sencillo, el problema se presenta cuando están en su forma general, entonces se podría graficar utilizando tablas de valores como se mostró en el primer bloque, aunque es más tardado y posiblemente no daría un panorama completo del comportamiento de la gráfica; para ello, en esta ocasión se abordará otra forma de bosquejar la gráfica de una función, utilizado las raíces de la función y analizando algunas características básicas de las funciones polinomiales de grado tres y cuatro.

<u>Ejemplo.</u> Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ mediante las raíces de la función.

Solución. Para encontrar la solución a la ecuación cúbica anterior, se requiere de factorizar el polinomio, en este caso, mediante factor común.

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad ó \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Al separar los factores, se obtiene el primer resultado que se busca $x_1 = 0$, pero también, se obtiene una ecuación cuadrática, la cual se requiere resolver utilizando la fórmula general o factorización, debido a su sencillez, se factorizará la ecuación.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

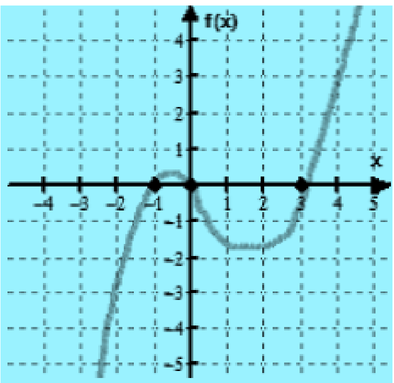
$$x - 3 = 0 \quad ó \quad x + 1 = 0$$

$$x_2 = 3 \qquad x_3 = -1$$

Ahora, se requiere analizar algunas características de las funciones cúbicas para poder bosquejar su gráfica.

1. El coeficiente principal es $a = 1$, por lo tanto, la mayor parte de su trayectoria es creciente, parte de$-\infty$ a ∞.
2. Es una función suave, sin ángulos en su trazo.
3. La función pasa por las raíces encontradas.

Por lo tanto, el trazo quedará más o menos como se muestra en la siguiente figura.



.

Ecuaciones factorizables

Teorema del residuo y del factor. Se requiere conocer la división entre polinomios como:

$x^2 + 2x - 8 \ \div x - 1$ $\qquad\qquad$ $x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \ \div x + 2$

$8x^3 - 27 \ \div 2x - 3$

Si se toma $x^2 + 2x - 8 \ \div x - 1$ y se realiza la división, ésta resultaría de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \ +3 \\
\hline
x-1 & x^2+2x-8 \\
 & \underline{-x^2+\ x} \\
 & \qquad 3x-8 \\
 & \qquad \underline{-3x+3} \\
 & \qquad\quad -5
\end{array}
$$

El resultado se puede escribir como:

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x - 1} = x + 3 + \frac{-5}{x - 1}$$

División de un polinomio entre un binomio de la forma (x –a), valiéndose del Teorema del residuo

El **Teorema del Residuo** se conforma de la siguiente forma:

- Si un polinomio$f(x)$ *se* divide entre el binomio $x - a$, *donde* r, es cualquier número real o complejo, entonces el residuo $es\ f(a)$.
- Esto significa que el residuo viene a ser el valor que se obtiene al sustituir a en el polinomio.
- Este teorema proporciona una herramienta de comprobación del algoritmo de la división.

Si se considera $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y se evalúa en $x = 1$ se obtiene:

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$f(1) = (1)^2 + 2(1) - 8$$

$$f(1) = 1 + 2 - 8$$

$$f(1) = -5$$

Esto significa que el resultado de la división es correcto, porque el polinomio evaluado en $x = 1$ resulta -5, como el residuo en la división.

Si el residuo es cero, significa que el binomio por el cual se dividió es un factor, esto es, se ha encontrado otra forma de factorizar un polinomio.

Binomio de la forma (x-a), como factor de un polinomio, valiéndose del Teorema del factor

Teorema del Factor. *Si* $a$es una raíz de$f(x) = 0$, es decir$f(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor de$f(x)$.

Ahora se retomará el polinomio anterior $x^2 + 2x - 8$, pero en esta ocasión se dividirá entre $x - 2$, para comprobar si es factor del polinomio $x^2 + 2x - 8$.

$$\begin{array}{r|l} & x + 4 \\ \hline x - 2 & x^2 + 2x - 8 \\ & \underline{-x^2 + 2x} \\ & \quad 4x - 8 \\ & \quad \underline{-4x + 8} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Como el resultado del residuo fue cero, entonces, $x - 2$ es factor del polinomio $x^2 + 2x - 8$ por lo tanto, éste se puede expresar como:

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

En el caso de que el polinomio representara a la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x = 2$ y $x = -4$ representarían las raíces de la función. Para comprobar se puede evaluar la función $f(2)$ y $f(-4)$.

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$f(2) = (2)^2 + 2(2) - 8$$

$$f(2) = 4 + 4 - 8$$

$$f(2) = 0$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) - 8$$

$$f(-4) = 16 - 8 - 8$$

$$f(-4) = 0$$

Ejemplo. Si las raíces de la función Polinomial son $-1, 1, -2, 3$, determinar dicha función.

Solución. Con cada una de las raíces se forma el factor correspondiente, quedando de la siguiente manera:

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 3$$

Por lo tanto, la ecuación que satisfacen es:

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-3) = 0$$

Multiplicando los factores queda:

$$(x^2-1)(x^2-x-6) = 0$$

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

La función se expresa

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

Aunque éste no es el único resultado, porque la función obtenida se extiende infinitamente hacia arriba, otra forma de función que cumple con las raíces anteriores es:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

Ésta se pasa por las mismas raíces pero se extiende infinitamente hacia abajo.

Para simplificar un poco el procedimiento de la división de polinomios, se puede utilizar otro método menos complicado, el cual es *la* **división sintética**, la cual es un proceso abreviado del algoritmo de división que se conoce hasta ahora.

Proceso de la división sintética para un polinomio y un binomio de la forma (x-a)

División sintética. Para ilustrar el procedimiento de la división sintética, se utilizará un ejemplo haciendo hincapié en que esta división sólo se aplica a divisiones con polinomios de una sola variable donde el divisor es de la forma $x - a$.

Procedimiento de la división sintética (**Regla de Ruffini**).

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \div x + 2$$

1. El dividendo debe estar ordenado de forma decreciente.
$$x^3 - 5x^2 + 3x - 2$$
2. En el primer renglón se ponen sólo los coeficientes del dividendo, sustituyendo por cero las potencias faltantes entre un término y otro del polinomio.
$$1 \quad -5 \quad 3 \quad -2$$
3. A la derecha del último elemento del dividendo se escribe r con signo contrario separado, por una línea vertical.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & 2 \end{array}$$
4. Se traza una línea horizontal que separa al segundo y tercer renglón.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ \hline & & 1 & & \end{array}$$
5. El primer término del dividendo se escribe como el primer término del tercer renglón
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$
6. Después se multiplica el primer término del tercer renglón por el divisor y el producto resultante se escribe en el segundo renglón y en la columna dos.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & -2 \\ & -2 & & & \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$
7. Se suman los términos de la segunda columna y el valor resultante se multiplica por el divisor, poniéndose dicho resultado en la tercera columna.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & -2 \\ & -2 & 14 & & \\ \hline 1 & -7 & & & \end{array}$$
8. Este proceso se sigue hasta sumar los elementos de la última columna del divisor.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & -2 \\ & -2 & 14 & -28 & \\ \hline 1 & -7 & 17 & -30 & \end{array}$$
9. Los coeficientes que quedan en el tercer renglón, son los coeficientes del cociente, y el último elemento del tercer renglón es el residuo.
$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 3 & -2 & -2 \\ & -2 & 14 & -28 & \\ \hline 1 & -7 & 17 & -30 & \\ x^2 & x & \text{cte.} & \text{residuo} & \end{array}$$

10. La división se puede escribir como se muestra:

$$\frac{x^3-5x^2+3x-2}{x+2}=(x+2)(x^2-7x+17)-30$$

Ejemplo. Dividir la función $f(x) = 8x^3 - 27 \div 2x - 3$, utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 8 & 0 & 0 & -27 & \frac{3}{2} \\ & 12 & 18 & 27 & \\ \hline 8 & 12 & 18 & 0 & \end{array}$$

Solución. El cociente de esta división es $8x^2 - 12x - 18$, entonces la función dada se puede expresar en términos de sus factores como:

$f(x) = (x - \frac{3}{2})(8x^2 + 12x + 18)$ O bien $f(x) = (2x - 3)(8x^2 + 12x + 18)$

Prueba del cero racional y define los teoremas fundamentales del álgebra y de la factorización lineal

Teoremas sobre las raíces de una ecuación. Se dividen en:

a) **Teorema fundamental del Álgebra**. Toda ecuación polinomial de grado $n \geq 1$tiene al menos una raíz, real o compleja.
b) **Teorema**. Todo polinomio de grado $n \geq 1$ puede ser expresado como producto de n **factores lineales**.

<u>Por ejemplo:</u>

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ Se puede factorizar y expresarse como$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$.

Ceros reales y complejos de funciones polinomiales factorizables

Teorema de las n raíces. Toda función polinomial $f(x) = 0$ de grado n tiene exactamente n raíces, siempre y cuando considere la multiplicidad de las raíces.

Por ejemplo:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ Tiene dos raíces iguales 2,2.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ Tiene tres raíces$-2, 1, 3$.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$ Tiene cuatro raíces$0, 2, 2i, 2i$, las dos primeras son reales y las otras dos son complejas.